



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ - VÂLCEA

17.02.2018

CLASA A XII-A

SUBIECTUL 1

a) Demonstrați că există o matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât matricele $A, A^2, A^3, \dots, A^{2018}$ să fie distincte două câte două, iar $G = \{A, A^2, A^3, \dots, A^{2018}\}$ să fie grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Arătați că grupul (G, \cdot) construit la a) este izomorf cu grupul aditiv \mathbb{Z}_{2018} al claselor de resturi modulo 2018.

SUBIECTUL 2

Pe mulțimea $K = (-17, +\infty)$ considerăm legea de compoziție $x \oplus y = (x+17)(y+17) - 17$.

a) Arătați că perechea (K, \oplus) este grup comutativ izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

b) Construiți pe mulțimea K o lege de compoziție „ \otimes ”, astfel încât (K, \oplus, \otimes) să fie corp comutativ izomorf cu corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

SUBIECTUL 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și funcțiile $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b g(x)dx$.

..... Gheorghe Stoica-G.M. 12/2017

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k+5)}$.

a) Arătați că $a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 (1-x^5) \left(\sum_{k=1}^n x^{2k-1} \right) dx$;

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

*Probleme selectate de prof. Gheorghe Necșuleu, Lădești, Vâlcea
Prof. Necșuliu Ion, Rm. Vâlcea*

Notă : Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.